FUNGSI

SMTS 1101 / 3SKS

LOGIKA MATEMATIKA

Disusun Oleh :

Dra. Noeryanti, M.Si

DAFTAR ISI

F U N G S I

6.1. Pengantar.

Materi pokok ini merupakan kasus khusus dari suatu Relasi. Topik yang diberikan merupakan konsep dasar yang memberikan gambaran mengenai suatu fungsi, fungsi invers, fungsi bijektif, penjumlahan fungsi dan pergandaan fungsi.

6.2. Kompetensi:

Setelah mempelajari materi pokok bahasan ini, mahasiswa diharapkan:

a. Mampu menggunakan konsep-konsep dasar suatu fungsi secara benar.
b. Mampu melakukan hitungan-hitungan dalam operasi-operasi penjumlahan dan pergandaan suatu fungsi.
c. Terampil dalam mengerjakan soal-soal kuis / latihan.

6.3. Uraian Materi

Banyak pendekatan yang ditempuh untuk mendefinisikan suatu fungsi. Dalam pokok bahasan disini, suatu fungsi akan didefinisikan langsung berdasarkan dua himpunan A adan B, dan juga didefinisikan berdasarkan pergandaan kartesius.

Dalam hal ini suatu fungsi merupakan keadaan khusus dari suatu relasi. Misalkan setiap unsur suatu himpunan *A* dikaitkan dengan tepat satu unsur dari himpunan *B*, cara pengkaitan seperti ini disebut ***fungsi*** atau ***pemetaan*** dari *A* ke *B* dinyatakan sebagai:

$$f : A \to B \quad \text{atau} \quad A \xrightarrow{f} B$$

6.3.1. Definisi Fungsi:

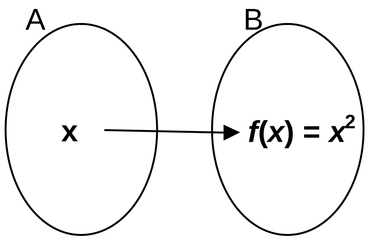
Suatu fungsi *f* dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap unsur $a \in A$ dengan satu dan hanya satu unsur $b \in$ B. Dinyatakan sebagai:

$$f : A \rightarrow B \text{ jika dan hanya jika } (\forall a \in A)\ (\exists !\, b \in B)\ f(a) = b$$

Unsur tunggal di *B* yang dikaitkan dengan $a \in A$ oleh *f* diberi **notasi *f*(*a*)** disebut ***peta* dari *a* oleh *f*** . Himpunan *A* ini disebut ***domain f*** dan *B* disebut ***ko-domain* dari *f***. Daerah hasil dari fungsi ***f*** diberi notasi ***f*[*A*]** yaitu himpunan peta-peta, dinyatakan sebagai $f[A] = \{ f(a) \in B / a \in A \}$. *f*[*A*] ini juga disebut himpunan semua bayangan-bayangan (image) dari unsur-unsur A.

Contoh (6.1):

Misalkan *f* mengkaitkan setiap bilangan real dengan kuadratnya. Sehingga, apabila *x* bilangan riil, maka $f(x) = x^2$.



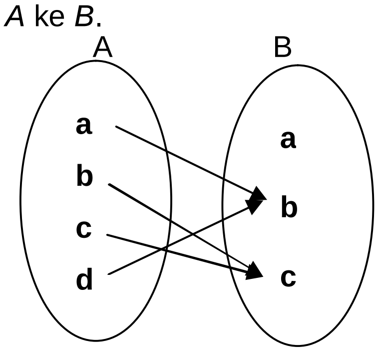
Misal:

Peta dari –3 adalah 9, dan ditulis *f*(-3) = 9 atau $f : -3 \rightarrow 9$

Contoh (6.2):

Misalkan *A* = {*a, b, c, d*} dan *B* = {*a, b, c*}.

Cara mengkaitkan $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$, $c \rightarrow c$ dan $d \rightarrow b$ merupakan fungsi dari *A* ke *B*.



Disini *f*(*a*) = *b*, *f*(*b*) = *c* , *f*(*c*) = *c* dan *f*(*d*) = *b*.
Daerah hasil *f* adalah {*b*, *c*}, dan ditulis
f[*A*] = {*b*, *c*}

Contoh (6.3):

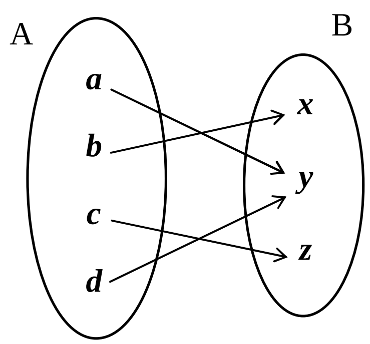
Misalkan *R* himpunan bilangan riil, dan $f : R \rightarrow R$ mengaitkan setiap bilangan rasional dengan 1 dan setiap bilangan tidak rasional dengan –1. Jadi

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, jika } x \text{ rasional} \\ -1 & \text{, jika } x \text{ tidak rasional} \end{cases};$$

f berkisar antara 1 dan –1 : *f*[*R*] = {1, -1}.

Contoh (6.4):

Misalkan *A* = {*a, b, c, d*} dan *B* = {*x, y, z*}. Fungsi $f : A \to B$ didefinisikan dengan diagram berikut.



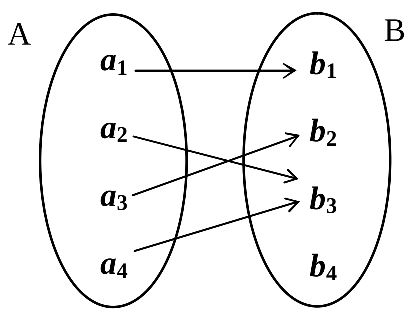
Tampak bahwa:

f(*a*) = *y*, *f*(*b*) = *x*, *f*(*b*) = *z* dan *f*(*d*) = *y*.

Selain itu *f*[*A*] = *B*, yang berarti daerah hasil dan ko-domainnya identik (sama).

Contoh (6.5):

Misalkan A dan B didefinisikan dengan diagram berikut :



$f[A] = \{f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)\}$
$= \{b_1, b_3, b_2, b_3\}$
$= \{b_1, b_2, b_3\}$

Catatan:

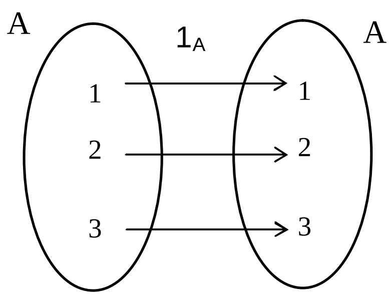
Contoh-contoh diatas, memperlihatkan bahwa setiap unsur pada domain dari *f* (yaitu *A*) mempunyai kawan tunggal di *B*, tetapi tidak sebaliknya.

6.3.2. Fungsi Satuan dan Fungsi Konstan

Ambil sembarang himpunan *A*.

Dibentuk fungsi $f : A \rightarrow A$ yang didefinisikan oleh rumus $f(x) = x$, maka f disebut ***fungsi satuan*** pada A, ditulis 1_A atau 1. Juga dikatakan sebagai suatu fungsi terhadap dirinya sendiri.

Contoh (6.6):

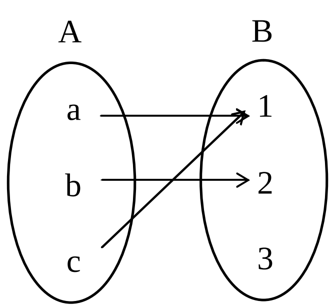


$A = \{1, 2, 3\}$

$1_A = \{ f(a) = a \,/\, a \in A \}$

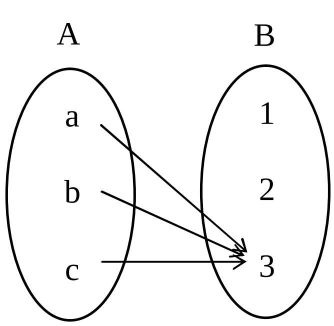
Suatu fungsi f dari A ke B disebut ***fungsi konstan***, jika elemen $b \in B$ yang sama, ditetapkan untuk setiap elemen dalam A. Dengan kata lain, $f : A \rightarrow B$ dikatakan fungsi konstan jika jangkauan (range) dari f hanya terdiri dari satu elemen.

Contoh (6.7):



Fungsi f didefinisikan oleh diagram sebelah kiri, maka f bukan suatu fungsi konstan, sebab ko-domain dari f terdiri dari 1 dan 2

Contoh (6.8):



Fungsi f didefinisikan oleh diagram sebelah kiri, maka f adalah fungsi konstan, karena 3 ditetapkan untuk setiap elemen A.

6.3.3. Kesamaan Dua Fungsi

Misalkan dua fungsi *f* dan *g* didefinisikan pada domain *D* yang sama yaitu $f : A \to B$ dan $g: A \to C$. Jika $f(a) = g(a)$ untuk setiap $a \in D$, maka fungsi-fungsi *f* dan *g* dikatakan sama, ditulis " $f = g$ " , didefinisikan sebagai :

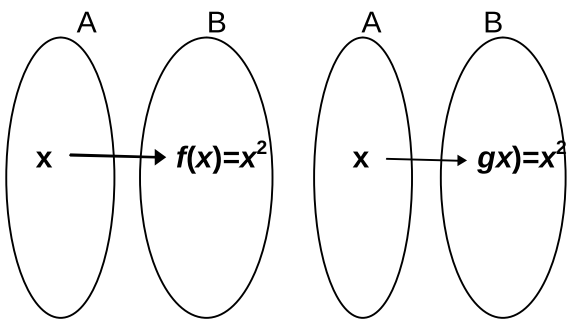
$$f = g \text{ jika dan hanya jika} (\forall a \in A) \to f(a)=g(a)$$

Sebaliknya :

$$f \neq g \text{ jika dan hanya jika } (\exists a \in A) \wedge f(a) \neq g(a)$$

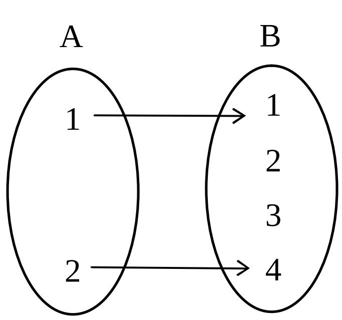
Contoh (6.9):

Jika fungsi *f* didefinisikan oleh rumus $f(x)=x^2$, dimana *x* adalah bilangan riil dan *g* didefinisikan oleh rumus $g(x) = x^2$, dimana *x* adalah bilangan kompleks, maka fungsi *f* tidaklah sama dengan *g* karena mereka memiliki domain yang berbeda.



Domain dari *f* : himpunan semua bilangan riel.
Domain dari g: himpunan semua bilangan kompleks
jadi f ≠ g, karena Domainnya berbeda

Contoh (6.10):



Suatu fungsi *f* didefinisikan oleh diagram sebelah kiri. Misalkan sebuah fungsi g didefinisikan oleh rumus $g(x) = x^2$ dimana domain *g* adalah {1, 2}.

Maka $f = g$, sebab keduanya memiliki domain yang sama dan untuk *f* dan *g* menetapkan bayangan yang sama untuk tiap-tiap elemen dalam domainnya

6.3.4. Fungsi Injektif, Surjektif dan Bijektif

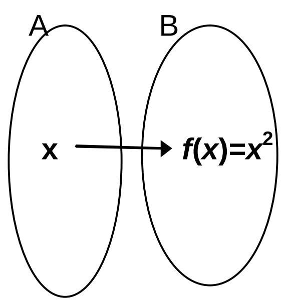
Misalkan *f* suatu fungsi dari *A* ke dalam *B*. Maka *f* disebut ***fungsi injektif*** (satu-satu) jika setiap unsur-unsur dalam *B* ditetapkan dengan tunggal unsur-unsur dalam *A*, artinya tak ada dua buah elemen dalam *A* yang mempunyai bayangan yang sama. Ditulis:

$f : A \to B$ disebut **injektif (satu-satu)** jika $\forall xy \in A$, $f(x) = f(y)$ maka $x = y$

atau $\forall xy \in A$, $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$

Contoh (6.11):

Misalkan fungsi $f : R^{\#} \to R^{\#}$ didefinisikan oleh rumus $f(x) = x^2$. Maka f bukan fungsi satu-satu karena $f(2) = f(-2) = 4$, yaitu bayangan dari dua bilangan riil yang berbeda yakni 2 dan –2, adalah bilangan yang sama, yaitu 4.



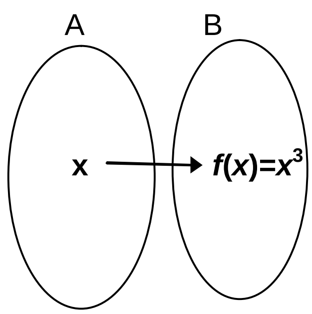
Keterangan:

2 → $f(2)= f(-2)=4$ ← -2

f bukan fungsi injektif

Contoh (6.12):

Misalkan fungsi $f : R^{\#} \to R^{\#}$ didefinisikan oleh rumus $f(x) = x^3$. Maka *f* adalah fungsi satu-satu karena pangkat tiga dari dua bilangan riil yang berbeda juga berbeda.



Keterangan:

2 $\longrightarrow$ $f(2)=8$

-2 $\longrightarrow$ $f(-2)=-8$

f merupakan fungsi injektif

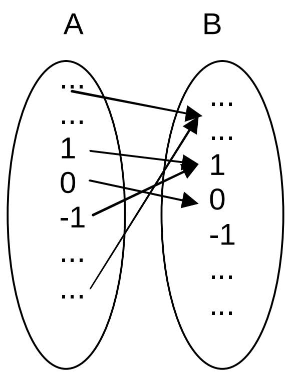
Misalkan *f* suatu fungsi dari *A* ke *B*. Maka *f*(*A*) dari *f* adalah subset (himpunan bagian) dari *B*, atau $f(A) \subset B$.

Jika *f*(*A*) = *B*, artinya jika setiap unsur *B* muncul sebagai bayangan dari sekurang-kurangnya satu unsur dalam *A*, maka dikatakan "*f* suatu **fungsi surjektif** dari *A* ke *B*". Fungsi *f* ini juga disebut *fungsi pada* (onto function).

$f : A \rightarrow B$ disebut **surjektif** jika $f(A) = B$

Contoh (6.13):

Misalkan fungsi $f : R^{\#} \rightarrow R^{\#}$ didefinisikan oleh rumus $f(x) = x^2$ (lihat contoh 6.11). Maka *f* bukan suatu fungsi surjektif, karena bilangan-bilangan negatif tak muncul dalam dari *f*, yaitu tidak ada bilangan negatif yang merupakan kuadrat sebuah bilangan riil.



Keterangan:

Misalnya f : A $\rightarrow$ B

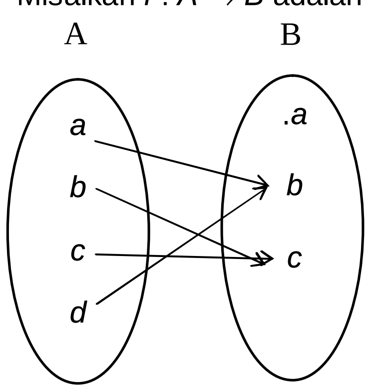
f[A] = {x/ x$\geq$0} $\subset$ B

f[A] $\neq$ B

jadi fungsi f tidak surjektif

Contoh (6.14):

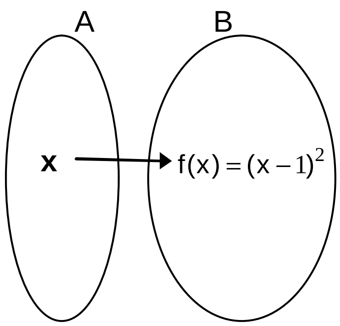
Misalkan $f : A \rightarrow B$ adalah suatu fungsi dari *A* = {*a, b, c, d*} ke *B* {*a, b, c*}



f(*a*) = *b*; *f*(*b*) = *c*; dan *f*(*d*) = *b.* diperoleh *f*(*A*) = {*b, c*}. Karena *B* = {*a, b, c*}, maka jangkauan dari *f* tidak sama dengan ko-codomainnya, jadi *f* tidak surjektif

Contoh (6.15):

Misalkan A adalah himpunan bilangan riel dan B himpunan bilangan riel non negatif. Dibentuk perkawanan f dari A ke B didefinisikan sebagai $f(x) = (x-1)^2$



Keterangan: $f : A \to B$

0 → 1
1
-1 → 9
2
½ → 0
-2
3 → 25
-½ → 4 dan lainya

f merupakan fungsi surjektif

Jika suatu fungsi *f* dari *A* ke *B* bersifat injektif (satu-satu) dan sekaligus surjektif (pada), maka fungsi *f* disebut "**bijektif**".

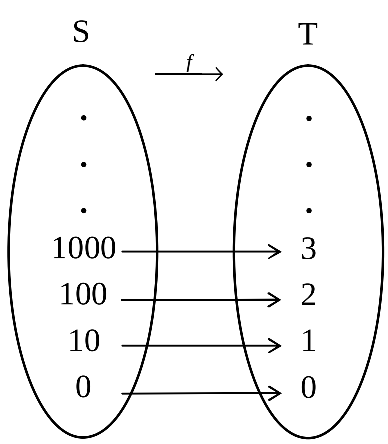
Contoh (6.16):

Misalkan *S* adalah himpunan bilangan-bilangan positif dan *T* adalah himpunan bilangan-bilangan riel. Dibentuk perkawanan : $f = S \to T$ dengan rumus

$f_s = \log s$. Akan ditunjukkan bahwa *f* bijektif.

Bukti :

$S = \{ x / x \geq 0 \}$ dan $T = \{ x / x = \text{bilangan riil} \}$



$f : S \to T$
0 → log 0 = 0
10 → log 10 = 1
100 → log 100 = 2
. .
. .
. .
. .
dst dst

f bersifat injektif juga surjektif.

maka f adalah **bijektif**

6.3.5. Penjulahan Suatu Fungsi

Misalkan fungsi *f* dari A ke B dan g dari A ke B, maka penjumlahan fungsi *f* dan *g* didefinisikan sebagai :

$$\boldsymbol{(f + g)\, x = f(x) + g(x),} \quad \text{untuk setiap } x \in A.$$

Contoh (6.17):

Jika fungsi $f : A \to B$, dengan rumusan $f(x) = 3x + 1$ dan

$g : A \to B$, dengan rumusan $g(x) = x^2 - 1$

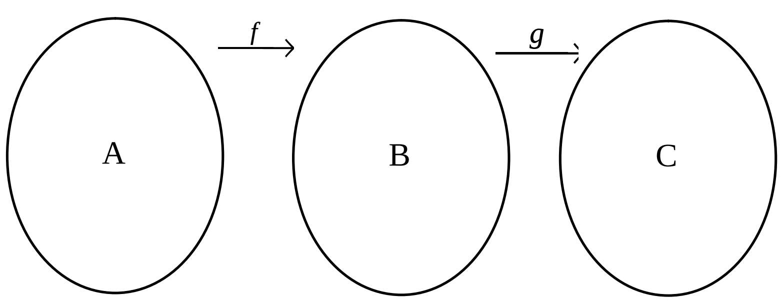
Maka : $(f + g)\, x = f(x) + g(x)$

$= 3x + 1 + x^2 - 1$

$= x^2 + 3x$

6.3.6. Pergandaan Suatu Fungsi

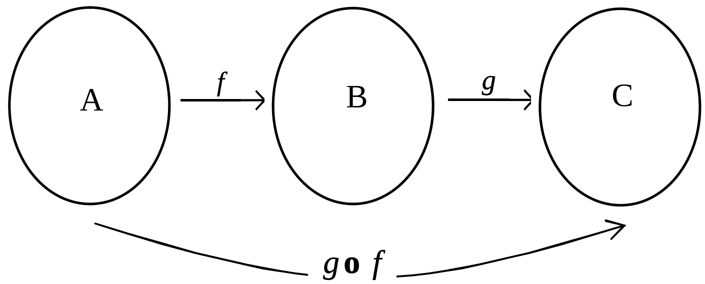
Misalkan fungsi *f* dari *A* ke *B* dan fungsi *g* dari *B* ke *C*. Dimana *B* merupakan ko-domain dari *f* tetapi juga *B* merupakan domainya dari *g*. dapat disajika seperti diagram berikut ini :



$$a \longrightarrow f(a) = b \longrightarrow g(b) = g\,(f(a))$$

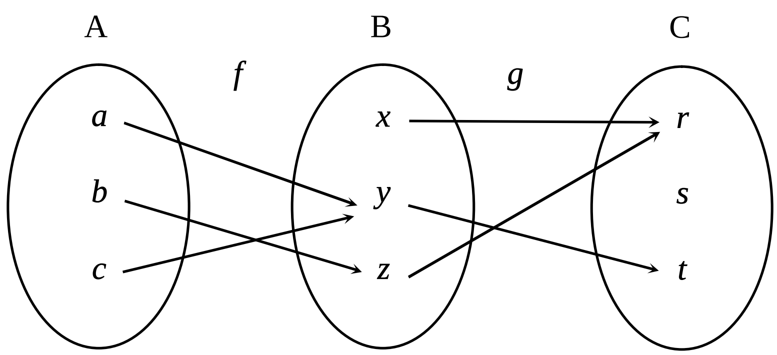
Dua fungsi *f* dan *g* dapat digandakan ditulis *g* o *f* atau *g f* saja, jika dan hanya jika ko-domain dari *f* sama dengan domain dari *g*.

Jadi jika $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$, maka $g \circ f : A \rightarrow C$ dengan $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ untuk setiap $a \in A$.



Contoh (6.18) :

(1) Misalnya $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ yang didefinisikan seperti diagram di bawah ini



Maka:

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(y) = t$

$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(z) = r$

$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(y) = t$

(2). Diambil A, B dan C himpunan-himpunan bilangan riil.

Jika fungsi f dan g didefinisikan sebagai $f(x) = x2$ dan $g(x) = x + 3$

Maka :

$(g \circ f)\, x = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 3$

$(f \circ g)\, x = f(g(x)) = f(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

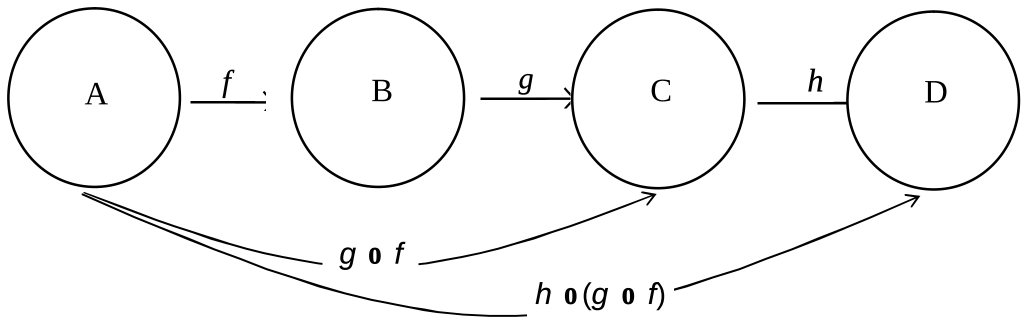
Jadi $g \circ f \neq f \circ g$

Biasanya pergandaan fungsi tidak bersifat komulatif, tetapi bersifat assosiatif. Seperti diilustrasikan berikut ini :

Ambil sembarang fungsi-fungsi $f : A \rightarrow B$; $g : B \rightarrow C$ dan $h : C \rightarrow D$

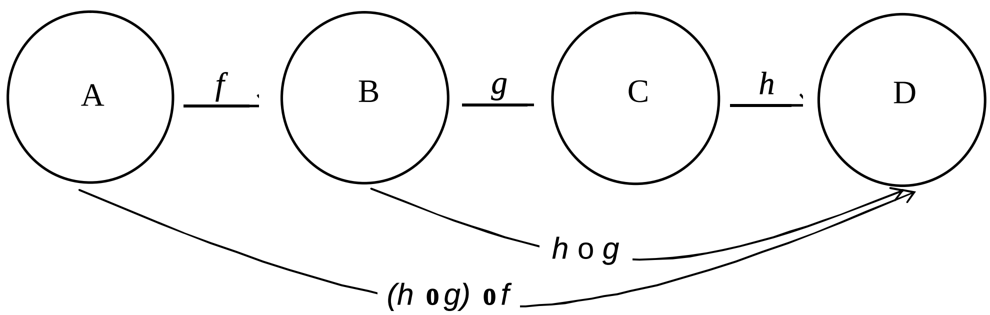
Dibentuk pergandaan fungsi-fungsi sbb:

(1)



$g \circ f : A \to C$ dan kemudian fungsi $h \circ (g \circ f) : A \to D$ ....*(1)*

(2)



$h \circ g : B \to D$ dan kemudian fungsi $(h \circ g) \circ f : A \to D$ .... *(2)*

Hasil dari (1) dan (2) diperoleh fungsi-fungsi (1) $h \circ (g \circ f) : A \to D$ dan (2) $(h \circ g) \circ f : A \to D$ Sehingga $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Disingkat $h \circ g \circ f : A \to D$. (tanpa tanda kurung)

6.3.7. Fungsi Invers

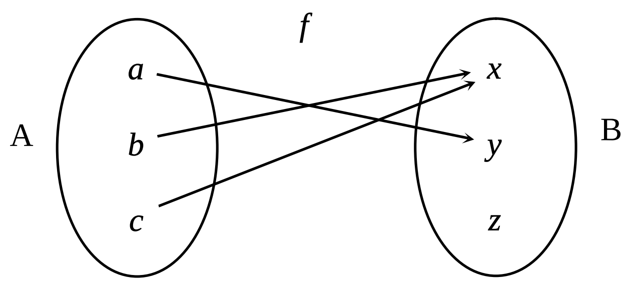
Misalkan f suatu fungsi dari A ke dalam B, dan misalkan $b \in B$. Maka invers dari b, dinyatakan oleh $f^{-1}(b)$, yang terdiri dari elemen-elemen A yang dipetakan pada b, yaitu elemen-elemen dalam A yang memiliki b sebagai bayangannya.

Jika fungsi $f : A \rightarrow B$ maka fungsi inversnya $f^{-1}(b) = \{x \mid x \in A,\ f(x) = b\}$

Perhatikan bahwa $f^{-1}(b)$ adalah sebuah himpunan bagian dari *A*, dan f^{-1} dibaca sebagai "*f* invers" atau "invers dari fungsi *f*".

Contoh (6.19):

Misalkan fungsi *f : A* $\rightarrow$ *B* didefinisikan oleh diagram berikut ini:



Maka $f^{-1}(x) = \{b, c\}$, karena baik *b* maupun *c* keduanya memiliki *x* sebagai titik bayangan mereka. Juga $f^{-1}(y) = \{a\}$, karena hanya *a* yang dipetakan kepada *y*. Invers dari *z*, $f^{-1}(z)$ adalah himpunan kosong, $\varnothing$, karena tidak ada elemen dalam *A* yang dipetakan ke *z*.

Contoh (6.20):

Misalkan $f : R^{\#} \rightarrow R^{\#}$, dari bilangan-bilangan riel yang didefinisikan oleh bentuk $f(x) = x^2$. Maka $f^{-1}(4) = \{2, -1\}$, karena 4 adalah bayangan dari 2 maupun –2 dan tidak ada bilangan riel lain yang kuadratnya adalah 4. Perhatikan bahwa $f^{-1}(-3) = \varnothing$, karena tak ada unsur dalam $R^{\#}$ yang kuadratnya adalah –3.

Contoh (6.21):

Misalkan f suatu fungsi dari bilangan-bilangan kompleks ke dalam bilangan-bilangan kompleks, dimana f didefinisikan oleh bentuk $f(x) = x^2$. Maka $f^{-1}(-3) = \{\sqrt{3}.i - \sqrt{3}.i\}$, karena kuadrat dari tiap-tiap bilangan ini adalah –3.

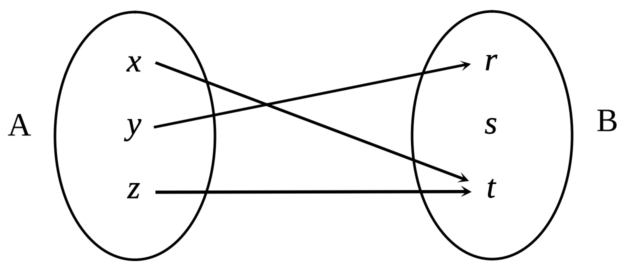
Perluasan definisi invers dari fungsi.

Misalkan $f : A \to B$ dan misalkan D suatu himpunan bagian dari B, yaitu $D \subseteq B$. Maka invers dari D di bawah peta f yang dinyatakan oleh $f^{-1}(D)$, terdiri dari elemen-elemen dalam A yang dipetakan pada beberapa elemen dalam D. Ditulis sebagai:

$$f^{-1}(D) = \{x \mid x \in A,\ f(x) \in D\}$$

Contoh (6.22):

Misalkan fungsi $f = A \to B$ didefinisikan oleh diagram



Maka $f^{-1}(\{r, s\}) = \{y\}$, karena hanya y yang dipetakan kepada r atau s. Juga $f^{-1}(\{r, t\}) = \{x, y, z\} = A$, karena tiap-tiap elemen dalam A memiliki r atau t sebagai inversnya.

Contoh (6.23):

Misalkan $f = R^{\#} \to R^{\#}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2$, dan $D = [4, 9] = \{x \mid 4 \le x \le 9\}$

Maka $f^{-1}(D) = \{ x \mid -3 \le x \le -2 \text{ atau } 2 \le x \le 3 \}$

Contoh (6.24):

Misalkan $f : A \to B$ adalah sebarang fungsi.

Maka $f^{-1}(B) = A$, karena setiap elemen dalam A memiliki bayangannya dalam B. Jika $f(A)$ menyatakan jangkauan dari fungsi f, maka $f^{-1}(f(A)) = A$

Selanjutnya, jika $b \in B$, maka $f^{-1}(B) = f^{-1}(\{b\})$. Disini f^{-1} mempunyai dua arti, yaitu sebagai invers dari sebuah elemen B dan sebagai invers dari himpunan bagian B.

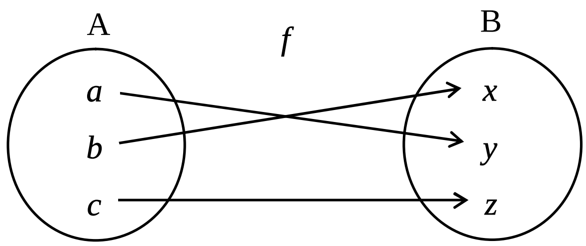
Misalkan f suatu fungsi dari A ke dalam B. Pada umumnya, $f^{-1}(b)$ dapat terdiri dari lebih dari satu elemen atau mungkin himpunan kosong $\varnothing$, Jika $f : A \to B$ adalah suatu fungsi injektif dan fungsi surjektif ,maka untuk tiap-tiap $b \in B$, invers $f^{-1}(b)$ akan terdiri dari sebuah elemen tunggal dalam A. Dengan demikian, suatu aturan yang menetapkan untuk tiap-tiap $b \in B$, sehingga elemen tunggal $f^{-1}(b) \in A$. Oleh sebab itu f^{-1} adalah suatu fungsi dari B ke A dan ditulis sebagai:

f^{-1} **:** ***B*** ® ***A.***

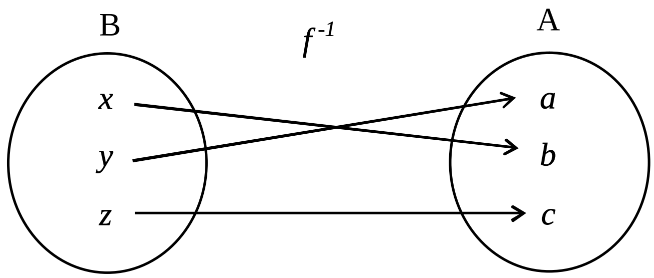
Dalam keadaan ini, bila $f : A \to B$ adalah injektif (satu-satu) dan surjektif (pada), dikatakan f fungsi bijektif dan mempunyai invers, maka f^{-1} disebut fungsi invers dari f.

Contoh (6.25):

Misalkan fungsi $f : A \to B$ didefinisikan oleh diagram berikut:



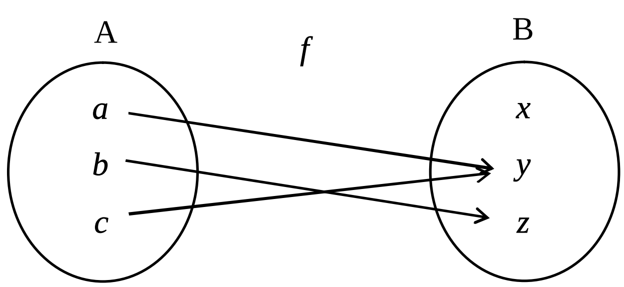
Perhatikan bahwa *f* adalah fungsi satu-satu dan pada. Sehingga f^{-1} merupakan fungsi invers dari *f,* dan dapat digambarkan f^{-1}: $B \to A$ dengan diagram.



Perhatikan bahwa jika diarahkan anak panah dalam arah yang terbalik dari diagram *f* maka diperoleh diagram dari f^{-1}.

Contoh (6.26):

Misalkan fungsi $f : A \to B$ didefinisikan oleh diagram



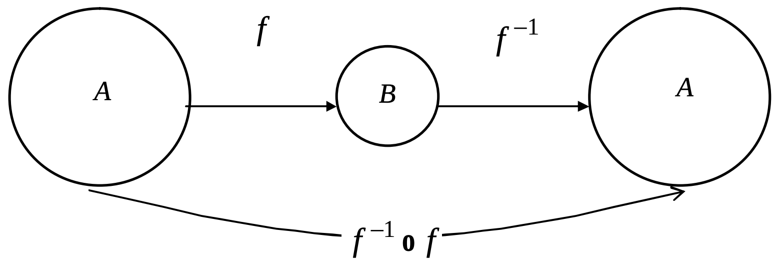
Karena $f(a) = y$ dan $f(c) = y$, maka fungsi *f* tidak satu-satu. Dengan demikian fungsi invers f^{-1} tidak ada. Jika f^{-1} $(y) = \{a, c\}$, maka tidak dapat menetapkan *a* dan *c* kedua-duanya untuk elemen $y \in B$.

Contoh (6.27):

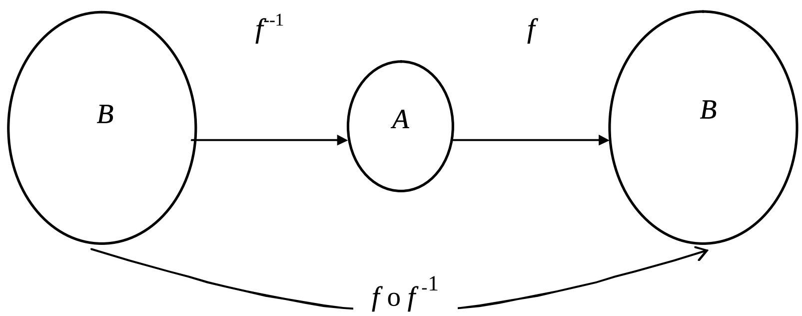
Misalkan $f : R^{\#} \to R^{\#}$, bilangan-bilangan riil yang didefinisikan oleh $f(x) = x^3$. Perhatikan bahwa *f* adalah satu-satu dan pada. Oleh karena itu $f^{-1} = R^{\#} \to R^{\#}$

ada. Pada kenyataannya dipunyai suatu bentuk yang dapat mendefinisikan fungsi invers ini, yaitu $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

Misalkan suatu fungsi f : $A \to B$ mempunyai fungsi invers $f^{-1} = B \to A$. Maka dapat dilihat dari diagram berikut :



Bahwa kita dapat membentuk hasilkali fungsi ($f^{-1} \circ f$) yang memetakan A ke dalam A, dan tampak dari diagram berikut :



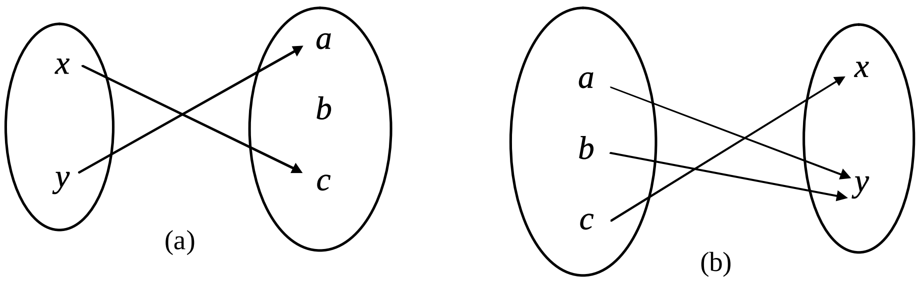
Bahwa kita dapat membentuk hasilkali fungsi ($f \circ f^{-1}$) yang memetakan B ke dalam B.

Misalkan suatu fungsi $f : A \to B$ adalah satu-satu dan pada yang berarti fungsi invers $f^{-1} : B \to A$ ada. Maka hasilkali fungsi ($f^{-1} \circ f$) : $A \to A$; adalah fungsi satuan pada A, dan hasilkali fungsi ($f \circ f^{-1}$) : $B \to B$; adalah fungsi satuan pada B.

Jika $f : A \to B$ dan $g : B \to A$, maka g adalah fungsi invers dari f yang berarti bahwa $g = f^{-1}$. Hasilkali fungsi ($g \circ f$) : $A \to A$ adalah fungsi satuan pada *A,* dan ($f \circ g$) : $B \to B$ adalah fungsi satuan pada B.

Contoh (6.28):

Misalkan $A = \{x, y\}$ dan $B = \{a, b, c\}$. Didefinisikan suatu fungsi $f : A \to B$ dengan diagram (a) di bawah ini. Sekarang definisikan suatu fungsi $g : B \to A$ dengan diagram (b) di atas.



(a) (b)

Dihitung fungsi $(g \circ f) : A \to A$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(c) = x$$

$$(g \circ f)(y) = g(f(y)) = g(a) = y$$

Dengan demikian hasilkali fungsi $(g \circ f)$ adalah fungsi satuan pada A. Tetapi g bukan fungsi invers dari f karena hasilkali fungsi $(f \circ g)$ bukan fungsi satuan pada B, jadi f bukan fungsi surjektif (pada).

Rangkuman.

1. Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap unsur $a \in A$ dengan satu dan hanya satu unsur $b \in$ B. Dinyatakan sebagai:

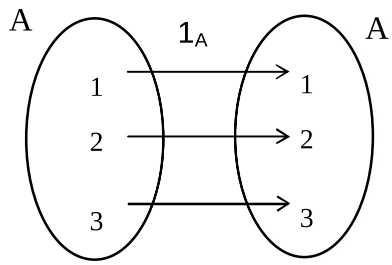
$$f : A \to B \text{ jika dan hanya jika } (\forall a \in A)\,(\exists !\, b \in B)\; f(a) = b$$

2. Jika suatu fungsi $f : A \to B$ maka setiap unsur $a \in A$, $f(a)$ disebut *peta* dari a.

   A disebut ***domain f*** dan B disebut *ko-domain* dari f.

   $f[A]$ adalah daerah hasil dari fungsi ***f*** yaitu himpunan peta-peta, yaitu $f[A] = \{ f(a) \in B / a \in A \}$. $f[A]$ ini juga disebut himpunan semua bayangan-bayangan (image) dari unsur-unsur A.

3. *Fungsi f* : $A \rightarrow A$ yang didefinisikan oleh rumus $f(x) = x$, disebut fungsi satuan pada A, ditulis 1_A atau 1. misalnya:

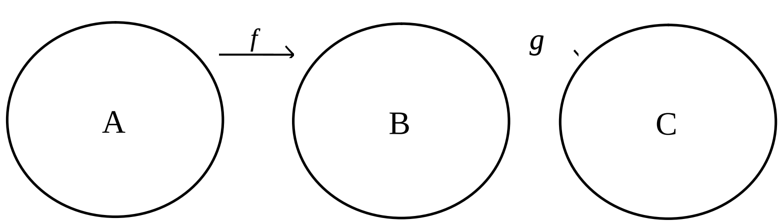


$A = \{1, 2, 3\}$

$1_A = \{ f(a) = a \,/\, a \in A \}$

4. Suatu fungsi *f* dari *A* ke *B* disebut ***fungsi konstan***, jika elemen b$\in$ B yang sama, ditetapkan untuk setiap elemen dalam A. Atau $f : A \rightarrow B$ dikatakan fungsi konstan jika jangkauan (range) dari *f* hanya terdiri dari satu elemen.
5. Jika dua fungsi *f* dan *g* didefinisikan sebagai $f : A \rightarrow B$ dan $g\colon A \rightarrow C$. dengan domain *D* yang sama. Jika $f(a) = g(a)$ untuk setiap $a \in D$, maka fungsi-fungsi *f* dan *g* dikatakan sama, ditulis $f = g$ jika dan hanya jika. $(\forall a \in A) \rightarrow f(a)=g(a)$.

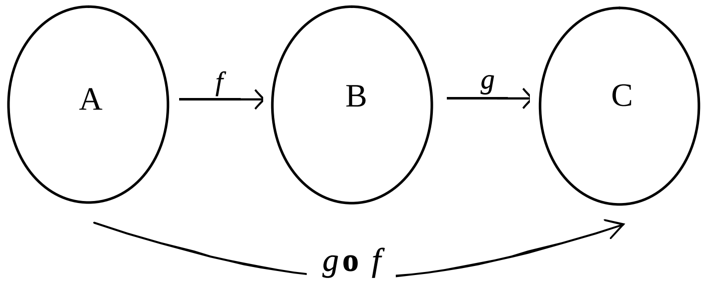
   Sebaliknya $f \neq g$ jika dan hanya jika $(\exists a \in A) \wedge f(a) \neq g(a)$
6. Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut **injektif (satu-satu)** jika $\forall xy \in A$, $f(x) = f(y)$ maka $x = y$ atau $\forall xy \in A$, $x \neq y$ maka $f(x) \neq f(y)$
7. Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut **surjektif** jika $f(A) = B$
8. Jika suatu fungsi *f* dari *A* ke *B* bersifat injektif (satu-satu) dan sekaligus surjektif (pada), maka fungsi *f* disebut "**bijektif**".
9. Misalkan fungsi *f* dari A ke B dan g dari A ke B, maka penjumlahan fungsi *f* dan *g* didefinisikan sebagai :**$(f + g)\, x = f(x) + g(x)$,** untuk setiap $x \in A$.
10. Misalkan fungsi *f* dari *A* ke *B* dan fungsi *g* dari *B* ke *C*. Dimana *B* merupakan ko-domain dari *f* tetapi juga *B* merupakan domainya dari *g*. dapat disajika seperti diagram berikut ini :



$a \longrightarrow f(a) = b \longrightarrow g(b) = g\,(f(a))$

11. Dua fungsi *f* dan *g* dapat digandakan ditulis *g* o *f*, jika dan hanya jika ko-domain dari *f* sama dengan domain dari *g*.

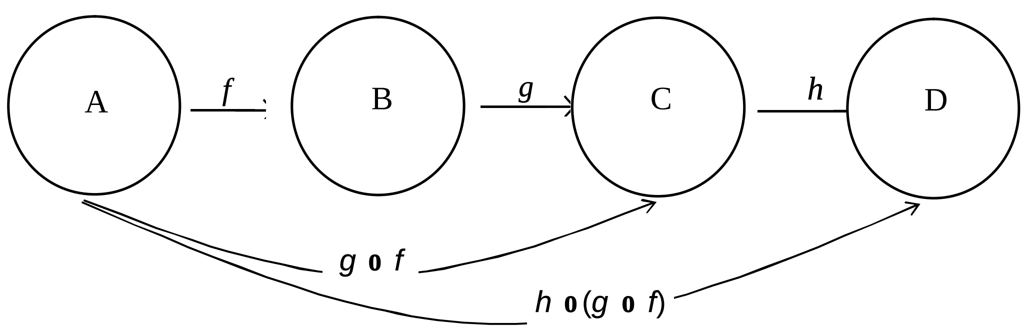
    Jadi jika $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$, maka $g \circ f : A \rightarrow C$ dengan $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ untuk setiap $a \in A$.



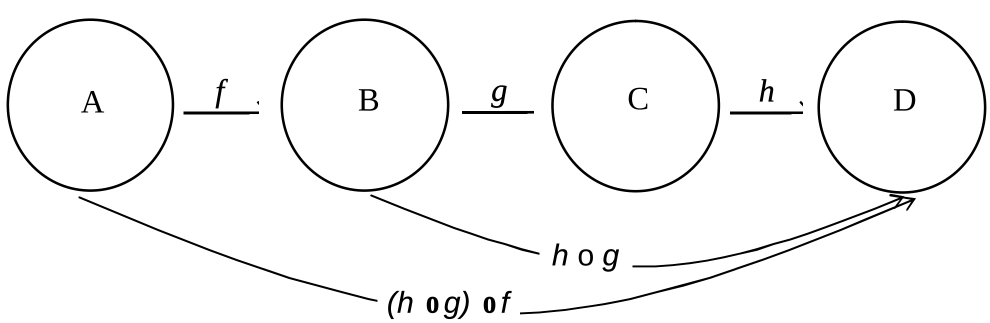
Pergandaan fungsi tidak bersifat komulatif yaitu $f \circ g \neq g \circ f$

Pergandaan fungsi bersifat asosiatif

Misalnya fungsi $f : A \rightarrow B$; $g : B \rightarrow C$ dan $h : C \rightarrow D$



$g \circ f : A \rightarrow C$ dan kemudian fungsi $h \circ (g \circ f) : A \rightarrow D$ ....*(1)*



$h \circ g : B \to D$ dan kemudian fungsi $(h \circ g) \circ f : A \to D$ .... *(2)*

(1) dan (2) diperoleh fungsi-fungsi (1) $h \circ (g \circ f) : A \to D$ dan (2) $(h \circ g) \circ f : A \to D$ Sehingga $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Disingkat $h \circ g \circ f : A \to D$. (tanpa tanda kurung)

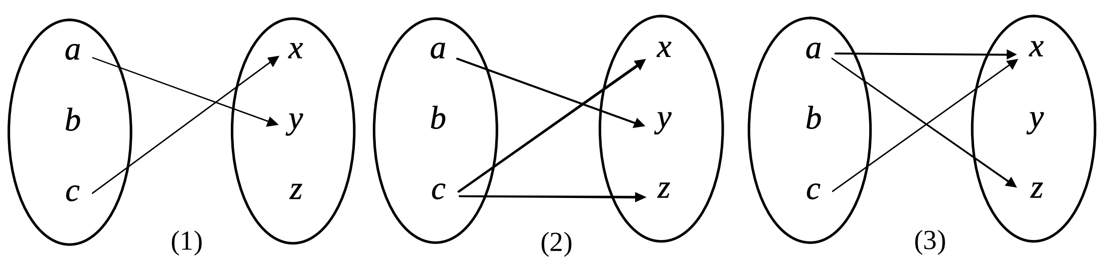
12. Misalkan f suatu fungsi dari A ke dalam B, dan misalkan $b \in B$. Maka invers dari b, dinyatakan oleh $f^{-1}(b)$, yang terdiri dari elemen-elemen A yang dipetakan pada b, yaitu elemen-elemen dalam A yang memiliki b sebagai bayangannya.

    Jika fungsi $f : A \to B$ maka fungsi inversnya $f^{-1}(b) = \{x \mid x \in A,\ f(x) = b\}$

13. Perluasan invers dari fungsi. Misal diketahui $f : A \to B$ dan $D \subseteq B$. Maka invers dari D di bawah peta f yang dinyatakan oleh $f^{-1}(D)$, terdiri dari elemen-elemen dalam A yang dipetakan pada beberapa elemen dalam D. Ditulis sebagai: f^{-1} **$(D) = \{x \mid x \in A,\ f(x) \in D\}$.**

Soal-soal dan Penyelesaian

1. Nyatakan apakah tiap-tiap diagram berikut ini mendefinisikan suatu fungsi dari $A = \{a, b, c\}$ ke dalam $B = \{x, y, z\}$ atau tidak.



Jawab:

(1) Tidak. Tidak ada yang ditetapkan untuk elemen $b \in A$.

(2) Tidak. Dua elemen x dan z, ditetapkan untuk elemen $c \in A$. Dalam suatu fungsi hanyalah satu elemen yang ditetapkan bagi elemen dalam domain.

(3) Ya. Adalah mungkin dalam fungsi dimana elemen yang sama dalam ko-domain ditetapkan bagi lebih dari satu elemen dalam domain.

2. Pergunakan suatu rumus untuk mendefinisikan kembali fungsi-fungsi berikut ini :

   (1) Untuk setiap bilangan riil, f_1 menetapkan pangkat tiganya.

   (2) Untuk tiap-tiap bilangan riil, f_2 menetapkan bilangan 5.

   (3) Untuk tiap-tiap bilangan positif, f_3 menetapkan kuadratnya dan untuk bilangan-bilangan riil lainnya, f_3 menetapkan bilangan 4.

   Jawab:

   (1) Fungsi f_1 adalah pemetaan dari $R^{\#}$ ke dalam $R^{\#}$ dapat didefinisikan oleh $f_1(x) = x^3$

   (2) Karena f_2 menetapkan 5 untuk setiap bilangan kita dapat mendefinisikan f_2 dengan $f(2) = 5$.

   (3) Karena ada dua aturan yang berbeda yang digunakan dalam mendefinisikan f_3, maka kita mendefinisikan f_3 sebagai berikut :

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2 \text{jika; } & x > 0 \\ 4 \quad \text{jika; } & x \le 0 \end{cases}$$

3. Yang mana dari pernyataan-pernyataan berikut ini berbeda dari yang lainnya dan mengapa ?

   (1) *f* suatu fungsi dari *A* ke dalam *B*

   (2) $f : A \to B$

   (3) $f : x \to f(x)$

   (4). $A \xrightarrow{f} B$

   (5). *f* pemetaan dari *A* ke dalam *B*.

   Jawab:

   Berbeda dari yang lainnya. Karena tidak diketahui domain dan ko-domainnya dalam (3), mengingat untuk yang lainnya diketahui bahwa *A* adalah domain dan *B* ko-domain.

4. Misalkan $f(x) = x^2$ mendefisikan suatu fungsi pada selang tertutup $-2 \le x \le 8$. Carilah (1). $f(4)$; (2). $f(-3)$; (3). $f(t-3)$.

Jawab:

(1) $f(4) = 4^2 = 16$

(2) $f(-3)$ tidak mempunyai arti, yang berarti tak terdefinisikan karena –3 tidak berada dalam domain dari fungsi.

(3) $f(t-3) = (t-3)^2 = t^2 - 6t + 9$. Tetapi rumus ini hanyalah benar jika $t-3$ berada dalam domainnya, yaitu $-2 \le t - 3 \le 8$. Dengan kata lain, t harus memenuhi $1 \le t \le 11$.

5. Misalkan fungsi $f : R^{\#} \to R^{\#}$ didefinisikan oleh : $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ jika x rasional} \\ -1 \text{ jika x irasional} \end{cases}$

(a) Nyatakan f dalam kata-kata.

(b) Carilah $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(\pi)$, $f(2.1313...)$, dan $f(\sqrt{2})$.

Jawab:

(a) Fungsi f menetapkan bilangan 1 untuk tiap-tiap bilangan rasional dan bilangan –1 untuk tiap-tiapbilangan irasional.

(b) Karena $1/2$ adalah bilangan rasional maka $f(1/2) = 1$. Karena π adalah bilangan irasional maka $f(\pi) = -1$. Karena 2,1313 … adalah desimal berulang yang menyatakan suatu bilangan rasional maka $f(2{,}1313 \ldots) = 1$. Karena $\sqrt{2}$ adalah irasional maka $f(\sqrt{2}) = -1$.

6. Misalkan fungsi $f : R^{\#} \to R^{\#}$ didefinisikan oleh $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 \text{ jika } x > 3 \\ x^2 - 2 \text{ jika } -2 \le x \le 3 \\ 2x + 3 \text{ jika } x < -2 \end{cases}$

Carilah : (a) $f(2)$, (b) $f(4)$, (c) $f(-1)$, (d) $f(-3)$

Jawab:

(a) Karena 2 berada dalam selang tertutup [-2, 3], maka digunakan rumus $f(x) = x^2 - 2$. Oleh karena itu $f(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$.

(b) Karena 4 termasuk selang (3, ∞) maka dipergunakan rumus $f(x) = 3x - 1$. Jadi $f(4) = 3(4) - 1 = 12 - 1 = 11$.

(c) Karena –1 berada dalam selang [-2, 3], maka kita pergunakan rumus $f(x) = x^2 - 2$. Diperoleh $f(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$.

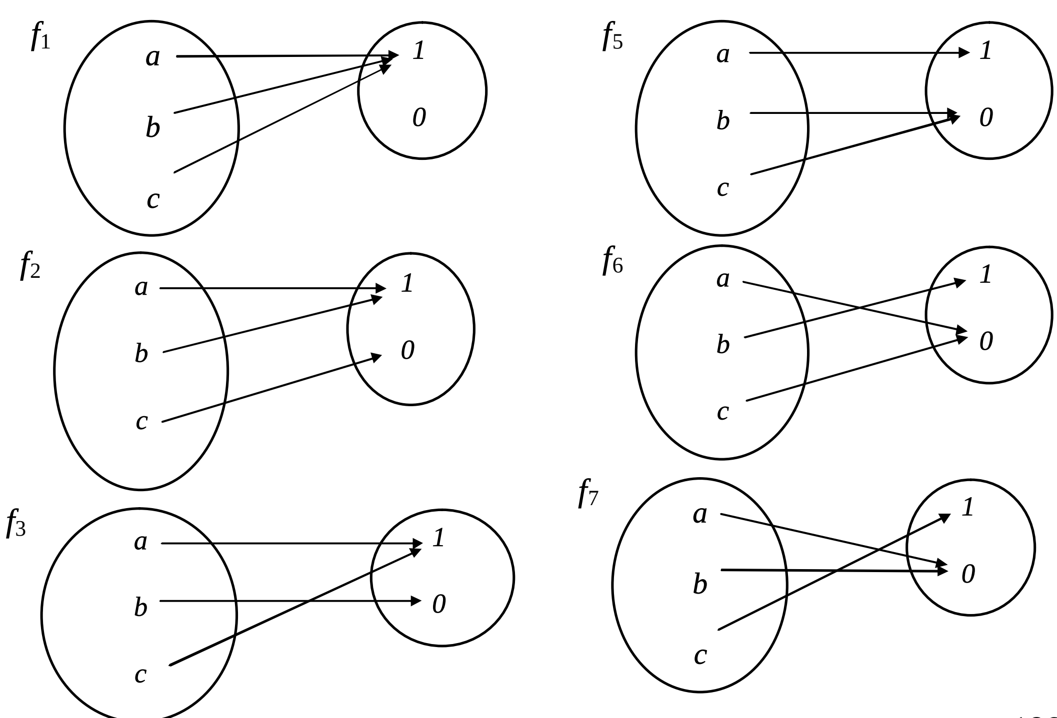
(d) Karena –3 lebih kecil daripada –2 , yang berarti –3 termasuk selang terbuka (-∞, -2) maka digunakan rumus $f(x) = 2x + 3$. Jadi $f(-3) = -6 + 3 = -3$.

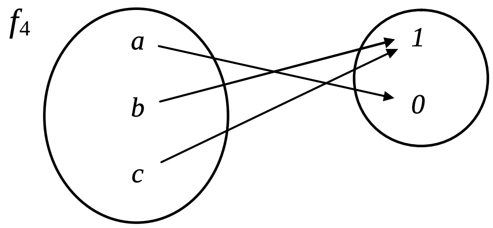
Perhatikan bahwa hanya terdapat satu fungsi yang didefinisikan meskipun ada tiga rumus yang digunakan untuk mendefinisikan *f*.

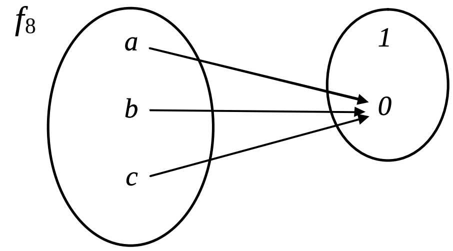
7. Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{1, 0\}$. Berapa banyak fungsi-fungsi yang berbeda yang dapat dibentuk dari *A* ke *B*, dan apa saja ?

Jawab:

Buat daftar semua fungsi dari *A* ke *B* dengan diagram-diagram. Dalam tiap-tiap fungsi ditetapkan 1 atau 0, tetapi tidak kedua-keduanya, untuk tiap-tiap elemen dalam *A*.

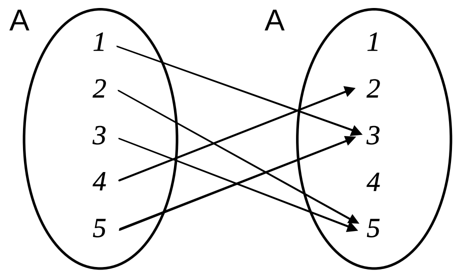






Perhatikan bahwa ada terdapat delapan buah fungsi.

8. Misalkan A = {1, 2, 3, 4, 5}. Definisikan fungsi $f : A \rightarrow A$ dengan diagram



Tentukan jangkauan dari fungsi f ?

Jawab:

Jangkauan (range) terdiri dari semua titik bayangan. Oleh karena itu hanya bilangan-bilangan 2, 3 dan 5 yang muncul sebagai titik-titik bayangan, maka jangkauan dari $f[A]$ adalah himpunan {2, 3, 5}.

9. Misalkan $W = \{a, b, c, d\}$. Dibentuk fungsi f dari W ke W didefinisikan sebagai $f(a) = a$, $f(b) = c$, $f(c) = a$, $f(d) = a$. Carilah jangkauan dari fungsi $f : W \rightarrow W$

Jawab:

Jangkauan dari f terdiri dari elemen-elemen yang muncul sebagai titik-titik bayangan. Sehingga a dan c yang muncul sebagai titik-titik bayangan dari elemen-elemen W. Oleh sebab itu, jangkauan dari f adalah $\{a, c\}$.

10. Misalkan V = {-2, -1, 0, 1, 2}. Dibentuk fungsi $g : V \rightarrow R^{\#}$ didefinisikan oleh rumus: $g(x) = x^2 + 1$

Carilah jangkauan dari g.

Jawab:

Dihitung bayangan dari tiap-tiap elemen dalam *V,* yaitu:

$g(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$ $\qquad$ $g(1) = (1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$

$g(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$ $\qquad$ $g(2) = (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

$g(0) = (0)^2 + 1 = 0 + 1 = 1$

Jadi jangkauan dari *g* adalah himpunan dari titik-titik bayangan {5, 2, 1, 2, 5} = himpunan {5,2,1}

11. Tiap-tiap rumus berikut mendefinisikan suatu fungsi dari $R^{\#}$ ke $R^{\#}$. Carilah jangkauan dari tiap-tiap fungsi.

(1). $f(x) = x^3$ $\qquad$ (2). $g(x) = \sin x$, $\qquad$ (3). $h(x) = x^2 + 1$

Jawab:

(1) Setiap bilangan riil a memiliki suatu akar pangkat tiga yang riil $\sqrt[3]{a}$; oleh karena itu $f\left(\sqrt[3]{a}\right) = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$

Jadi, jangkauan dari *f* adalah himpunan dari semua bilangan-bilangan riil.

(2) Sinus dari sebarang bilangan riil terletak dalam selang tertutup [-1, 1]. Dan, semua bilangan-bilangan dalam selang ini adalah sinus dari sebarang bilangan riil. Maka jangkauan dari *g* adalah selang [-1, 1].

(3) Jika ditambahkan 1 pada tiap-tiap bilangan riil, kita peroleh himpunan bilangan-bilangan yang lebih besar daripada atau sama dengan 1. Dengan perkataan lain, jangkauan dari *h* adalah selang tak berhingga [1, ∞].

12. Misalkan fungsi-fungsi f_1, f_2, f_3, f_4 dari $R^{\#}$ kedalam $R^{\#}$ didefinmisikan oleh.

(a) $f_1(x) = x^2$ $\qquad$ (c). $f_3(z) = z^2$

(b) $f_2(y) = y^2$ $\qquad$ (d). f_4 menetapkan kuadrat tiap-tiap bilangan riil.

Tentukan fungsi-fungsi yang sama .

Jawab:

Mereka semuanya sama. Tiap-tiap fungsi menetapkan bilangan yang sama untuk setiap bilangan riil.

13. Misalkan fungsi-fungsi f , g dan h didefinisikan oleh :

(a) $f(x) = x^2$ dimana $0 \le x \le 1$

(b) $g(y) = y^2$ dimana $2 \le y \le 8$

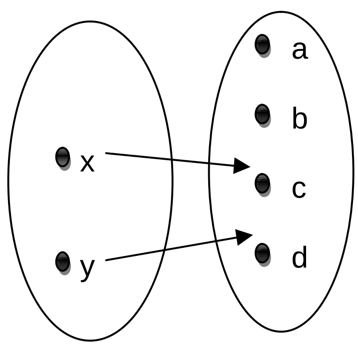
(c) $h(z) = z^2$ dimana $z \, \varepsilon \, R^{\#}$

Tentukan yang mana dari fungsi-fungsi ini yang sama ?

Jawab:

Tak ada satu fungsipun yang sama. Meskipun aturan-aturan korespondensi sama, daerah definisinya berbeda. Jadi fungsi-fungsinya berbeda.

14. Misalkan A = {x,y} dan B = {a, b, c, d}. Fungsi terlihat seperti pada diagram berikut apakah bersifat injektif ataukah surjektif?



Jawab:

f merupakan fungsi injektif (satu-satu)

15. Misalkan *A* = {*a, b, c, d, e*}, dan *B* himpunan dari huruf-huruf dalam abjad. Dibentuk fungsi-fungsi *f*, *g* dan *h* dari *A* ke *B* didefinisikan oleh :

A B

(1) $f(a) = r$, $f(b) = a$, $f(c) = s$, $f(d) = r$, $f(e) = e$

(2) $g(a) = a$, $g(b) = c$, $g(c) = e$, $g(d) = r$, $g(e) = s$

(3) $h(a) = z$, $h(b) = y$, $h(c) = x$, $h(d) = y$, $h(e) = z$

Nyatakan apakah tiap-tiap fungsi ini injektif (satu-satu) atau tidak.

Jawab:

Perhatikan bahwa agar suatu fungsi adalah satu-satu, ia harus menetapkan bayangan-bayangan yang berbeda untuk elemen-elemen yang berbeda dalam domain.

(1) f bukalah fungsi satu-satu karena f menetapkan r untuk a dan d, kedua-duanya, yaitu $f(a)=f(d) = r$.

(2) g adalah fungsi satu-satu.

(3) h bukanlah fungsi satu-satu karena $h(a) = h(e)$.

16. Nyatakanlah apakah tiap-tiap fungsi berikut satu-satu atau tidak.

(1) Untuk tiap-tiap penduduk bumi, tetapkan bilangan yang berkaitan dengan usianya.

(2) Untuk tiap-tiap negara di dunia, tetapkan jumlah penduduk negara-negara itu.

(3) Untuk tiap-tiap buku yang ditulis oleh seorang pengarang, tetapkan pengarangnya.

(4) Untuk tiap-tiap negara di dunia yang mempunyai perdana menteri, tetapkan perdana menterinya.

Jawab:

(1) Banyak orang di dunia yang mempunyai usia sama; oleh karena itu fungsi ini tidak satu-satu.

(2) Meskipun dua buah negara mungkin mempunyai jumlah penduduk yang sama, statistik memperlihatkan bahwa dewasa ini tidaklah demikian; oleh karena itu fungsi ini satu-satu.

(3) Adalah mungkin untuk dua buah buku yang berbeda mempunyai pengarang yang sama; oleh karena itu fungsi ini tidak satu-satu.

(4) Tidak ada dua negara yang berbeda di dunia ini mempunyai perdana menteri yang sama; oleh karena itu fungsi ini satu-satu.

17. Misalkan $A = [-1, 1] = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $B = [1, 3]$ dan $C = [-3, -1]$. Misalkan fungsi-fungsi $f_1 : A \rightarrow R^{\#}$, $f_2 : B \rightarrow R^{\#}$ dan $f_3 : C \rightarrow R^{\#}$ didefinisikan oleh aturan : Untuk tiap-tiap bilangan, tetapkan kuadratnya. Yang mana dari fungsi-fungsi ini satu-satu ?

Jawab:

Fungsi $f_1 : A \to R^{\#}$ tidaklah satu-satu karena $f_1\left(\frac{1}{2}\right) = f_1\left(\frac{1}{2}\right)$, yaitu karena dua bilangan yang berbeda dalam daerah definisi ditetapkan bayangan yang sama.

Fungsi $f_2 : B \to R^{\#}$ adalah satu-satu karena kuadrat dari bilangan-bilangan positif yang berbeda adalah berbeda.

Juga, $f_3 : C \to R^{\#}$ adalah satu-satu karena kuadrat dari bilangan-bilangan negatif yang berbeda adalah berbeda.

Perhatikan, sekali lagi, bahwa suatu rumus sendiri tidaklah mendefinisikan suatu fungsi. Kenyataannya, bahwa rumus yang sama memberikan fungsi-fungsi yang berbeda yang memiliki sifat-sifat yang sama.

18. Carilah selang “terbesar” *D* dimana rumus $f(x) = x^2$ mendefinisikan suatu fungsi satu-satu.

Jawab:

Selama selang *D* memuat bilangan-bilangan positif atau negatif, tetapi tidak kedua-duanya maka fungsinya adalah satu-satu. Jadi *D* dapatlah berupa selang-selang terbuka [0, ∞] atau (-∞, 0]. Ada terdapat selang-selang tak terhingga lainnya dimana *f* adalah satu-satu, tetapi mereka akan berupa subhimpunan-subhimpunan dari salah satu dari kedua ini.

19. Dalam soal 7 didaftar semua fungsi-fungsi yang mungkin dari *A* = {*a, b, c*} ke *B* = {1,0}. Yang manakah dari fungsi-fungsi ini adalah satu-satu ?

Jawab:

Tak satupun dari fungsi-fungsi itu satu-satu. Dalam tiap-tiap fungsi, sekurang-kurangnya dua elemen mempunyai bayangan yang sama.

20. Misalkan $f : A \to B$. Carilah *f*(*A*), yaitu jangkauan dari *f*, jika f adalah fungsi pada

Jawab:

Jika *f* adalah fungsi pada maka setiap elemen dalam pasangan domain (ko-domain) *f* adalah dalam jangkauan, oleh karena itu $f(A) = B$.

21. Apakah fungsi $f : A \to A$ dalam Soal 8 surjektif (pada) ?

    Jawab:

    Bilangan-bilangan 1 dan 4 dalam ko-domain bukanlah bayangan-bayangan dari sebarang elemen dalam domain; oleh karena itu *f* tidaklah fungsi pada. Dengan kata lain, $f(A) = \{2, 3, 5\}$ adalah sebuah subhimpunan sejati dari A.

22. Ambilkan $A = [-1, 1]$. Misalkan fungsi-fungsi *f*, *g* dan *h* dari *A* ke dalam *A* didefinisikan oleh :

    (1) $f(x) = x^2$, (2). $g(x) = x^2$, (3) $h(x) = \sin x$

    Fungsi yang mana, adalah pada ?

    Jawab:

    (1) Tak ada bilangan-bilangan negatif yang muncul dalam daerah nilai *f*; oleh karena itu *f* bukanlah fungsi pada.

    (2) Fungsi *g* adalah pada, yaitu $g(A) = A$.

    (3) Fungsi *h* bukanlah pada. Karena tidak ada bilangan *x* dalam *A* sehingga $\sin x = 1$.

23. Dapatkah fungsi konstan menjadi suatu fungsi surjektif (pada) ?

    Jawab:

    Jika ko-domain dari fungsi *f* terdiri dari elemen tunggal, maka *f* selalu suatu fungsi konsan dan adalah pada.

24. Pada himpunan-himpunan *A* yang mana, fungsi satuan $1_A : A \to A$ akan surjektif (pada) ?

    Jawab:

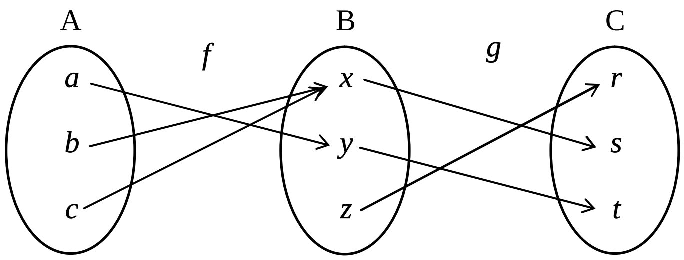
    Fungsi satuan selalu pada; oleh karena itu *A* dapat berupa himpunan apa pun.

25. Dalam soal 7 didaftarkan semua fungsi-fungsi yang mungkin dari $A = \{a, b, c\}$ ke dalam $B = \{1, 0\}$. Yang mana dari fungsi-fungsi ini adalah fungsi pada ?

Jawab:

Semua fungsi-fungsi itu adalah pada kecuali f_1 dan f_8

26. Misalkan fungsi-fungsi $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ didefiniskan oleh diagram



(a) Carilah hasilkali fungsi $(g \circ f) : A \to C$

(b) Carilah jangkauan dari f, g dan $g \circ f$.

Jawab:

(a) Digunakan definisi hasilkali fungsi dan menghitung :

$(g \circ f)(a) \equiv g(f(a)) = g(y) = t$

$(g \circ f)(b) \equiv g(f(b)) = g(x) = s$

$(g \circ f)(c) \equiv g(f(c)) = g(y) = t$

Perhatikan bahwa didapatkan jawaban yang sama jika kita "mengikuti tanda panah" : $a \to y \to t$

$b \to x \to s$

$c \to y \to t$

(b) Menurut diagram, jangkauan dari f adalah $\{x, y\}$, dan jangkauan dari g adalah $\{r, s, t\}$. Menurut (*a*), jangkauan dari $g \circ f$ adalah $\{s, t\}$. Perhatikan bahwa jangkauan dari g dan $g \circ f$ berbeda.

27. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan fungsi-fungsi $f : A \to A$ didefinisikan oleh :

$f(1) = 3$, $f(2) = 5$, $f(3) = 3$, $f(4) = 1$, $f(5) = 5$

$g(1) = 4$, $g(2) = 1$, $g(3) = 1$, $g(4) = 1$, $g(5) = 3$

Carilah fungsi-fungsi komposisi $f \circ g$ dan $g \circ f$.

Jawab:

Dengan menggunakan definisi hasilkali fungsi dan dihitung :

$(f \circ g)(1) \equiv f(g(1)) = f(4) = 1$

$(f \circ g)(2) \equiv f(g(2)) = f(1) = 3$

$(f \circ g)(3) \equiv f(g(3)) = f(1) = 3$

$(f \circ g)(4) \equiv f(g(4)) = f(2) = 5$

$(f \circ g)(5) \equiv f(g(5)) = f(3) = 3$

Juga,

$(g \circ f)(1) \equiv g(f(1)) = g(3) = 1$

$(g \circ f)(2) \equiv g(f(2)) = g(5) = 3$

$(g \circ f)(3) \equiv g(f(3)) = g(3) = 1$

$(g \circ f)(4) \equiv g(f(4)) = g(1) = 4$

$(g \circ f)(5) \equiv g(f(5)) = g(2) = 1$

Perhatikan bahwa fungsi-fungsi $f \circ g$ dan $g \circ f$ tidak sama.

28. Misalkan fungsi-fungsi $f : R^{\#} \to R^{\#}$ dan $g : R^{\#} \to R^{\#}$ didefinisikan oleh

$f(x) = 2x + 1,$ $\qquad g(x) = x^2 - 2$

Carilah rumus-rumus yang mendefinisikan hasilkali fungsi $g \circ f$ dan $f \circ g$.

Jawab:

Pertama dihitung $g \circ f : R^{\#} \to R^{\#}$. Pada dasarnya disubstitusikan rumus untuk f di dalam rumus g. Digunakan definisi hasilkali fungsi sebagai berikut :

$(g \circ f)(x) \equiv g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 – 2 = 4x^2 + 4x - 1$

Mungkin jika fungsi-fungsi didefinisikan sebagai

$y = f(z) = 2x + 1,\; z = g(y) = y^2 - 2$

Kemudian y dieliminasikan dari kedua rumus :

$z = y^2 – 2 = (2x – 1)^2 – 2 = 4x^2 + 4x - 1$

Sekarang menghitung $f \circ g : R^{\#} \to R^{\#}$:

$(f \circ g)(x) \equiv f(g(x)) = f(x^2 - 2) = 2(x^2 - 2) + 1 = 2x^2 - 3$

29. Misalkan fungsi-fungsi f dan g pada bilangan-bilangan riil $R^{\#}$ didefinisikan oleh

$f(x) = x^2 + 2x - 3, \ \ g(x) = 3x - 4$

(1) Carilah rumus-rumus yang mendefinisikan $g \circ f$ dan $f \circ g$.

(2) Periksalah rumus-rumus itu dengan memperlihatkan $(g \circ f)(2) = g(f(2))$ dan $(f \circ g)(2) = f(g(2))$.

Jawab:

(1) $(g \circ f)(x) \equiv g(f(x)) = g(x^2 + 2x - 3) = 3(x^2 + 2x - 3) - 4 = 3x^2 + 6x - 13$

$(f \circ g)(x) \equiv f(g(x)) = f(3x - 4) = (3x - 4)^2 + 2(3x - 4) - 3 = 9x^2 - 18x + 5$

(2) $(g \circ f)(2) = 3(2)^2 + 6(2) - 13 = 12 + 12 - 13 = 11$

$g(f(2)) = g(2^2 + 2(2) - 3) = g(5) = 3(5) - 4 = 11$

$(f \circ g)(2) = 9(2)^2 - 18(2) + 5 = 36 - 36 + 5 = 5$

$f(g(2)) = f(3(2) - 4) = f(2) = 2^2 + 2(2) - 3 = 5$

30. Buktikan : Jika $f : A \rightarrow B$ adalah pada dan $g : B \rightarrow C$ adalah pada maka fungsi hasilkali $(g \circ f) : A \rightarrow C$ adalah pada.

Jawab:

Misalkan c sebarang elemen dalam C. Karena g adalah pada, maka terdapat suatu elemen $b \in B$ sehingga $g(b) = c$. Juga, karena f adalah pada maka terdapat suatu elemen $a \in A$ sehingga $f(a) = b$. Sekarang $(g \circ f)(a) \equiv g(f(a)) = g(b) = c$. Jadi untuk sebarang $c \in C$, terdapat sekurang-kurangnya satu elemen $a \in A$ sehingga $(g \circ f)(a) = c$. Dengan demikian $g \circ f$ adalah fungsi surjektif (pada).

31. Buktikan bahwa jika $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ dan $h : C \rightarrow D$; maka

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Jawab:

Kedua fungsi adalah sama jika mereka menetapkan bayangan yang sama dalam domain, yaitu, jika $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$

untuk setiap $x \,\varepsilon\, A$. Dengan menghitung,

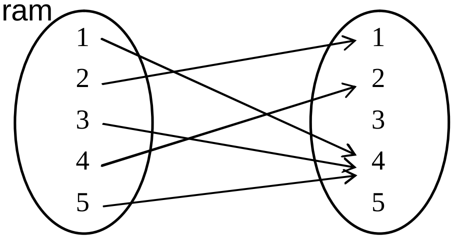
$$((h \circ g) \circ f)\,(x) \equiv (h \circ g)(f(x)) \equiv h(g(f(x)))$$

dan

$$(h \circ (g \circ f))(x) \equiv h((g \circ f)(x)) \equiv h(g(f(x)))$$

Oleh karena itu $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

32. Ambilkan A = {1, 2, 3, 4, 5}. Misalkan fungsi $f : A \to A$ didefinisikan oleh diagram



Carilah (1) $f^{-1}(2)$, (2) $f^{-1}(3)$, (3) $f^{-1}(4)$,

(4) $f^{-1}\{1,2\}$, (5) $f^{-1}\{2,3,4\}$

Jawab:

(1) f^{-1} (2) terdiri dari elemen-elemen yang bayangannya adalah 2. Hanya 4 yang mempunyai bayangan 2; oleh karena itu f^{-1} (2) = {4}.

(2) f^{-1} (3) = $\varnothing$ karena 3 bukanlah bayangan dari elemen apapun.

(3) f^{-1} (4) = {1,2,5} karena $f(1) = 4$, $f(3) = 4$, $f(5) = 4$ dan karena 4 bukanlah bayangan elemen yang lainnya.

(4) $f^{-1}\{1,2\}$ terdiri dari elemen-elemen yang bayangnnya 1 atau 2; oleh karena itu $f^{-1}\{1,2\}$ = {2, 4}.

(5) $f^{-1}\{2,3,4\}$ = {4,1,3,5} karena tiap-tiap bilangan ini, dan tidak yang lainnya, memiliki 2, 3 atau 4 sebagai titik bayangan.

33. Misalkan fungsi $f : R^{\#} \to R^{\#}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2$. Carilah :

(1) f^{-1} (25), (3). f^{-1} ([-1, 1)], (5). f^{-1} ([4, 25)]

(2) f^{-1} (-9), (4). f^{-1} ([-∞, 0)]

Jawab:

(1) f^{-1}(25) = {5, -5} karena $f(5) = 25$ dan $f(-5) = 25$ dan karena tidak ada bilangan lain yang kuadratnya adalah 25.

(2) f^{-1}(25) = ∅ karena tidak ada bilangan riil yang kuadratnya adalah –9, yaitu persamaan $x^2 = -9$ tidak mempunyai akar riil.

(3) f^{-1}([-1,1]) = [-1, 1] karena jika $| x | \leq 1$ maka berarti $| x^2 | \leq 1$ yaitu jika x termasuk [-1, 1] maka $f(x) = x^2$ juga termasuk [-1, 1].

(4) f^{-1} ((-∞, 0]) = {0} karena $0^2 = 0$ ε (-∞, 0] dan karena tidak ada bilangan lainnya yang kuadratnya termasuk (-∞, 0]

(5) f^{-1} ([4, 24]) terdiri dari bilangan-bilangan yang kuadratnya termsuk [4, 25], yaitu bilangan-bilangan x sehingga $4 \leq x^2 \leq 25$. Oleh karena itu.

f^{-1} ([4, 25]) = $\{x \mid 2 \leq x \leq 5$ atau $-5 \leq x \leq -2\}$

34. Misalkan $f : A \to B$. Carilah $f^{-1}(f(A))$, yaitu, carilah invers dari jangkauan f.

Jawab:

Karena bayangan dari setiap elemen A berada dalam jangkauan f, maka

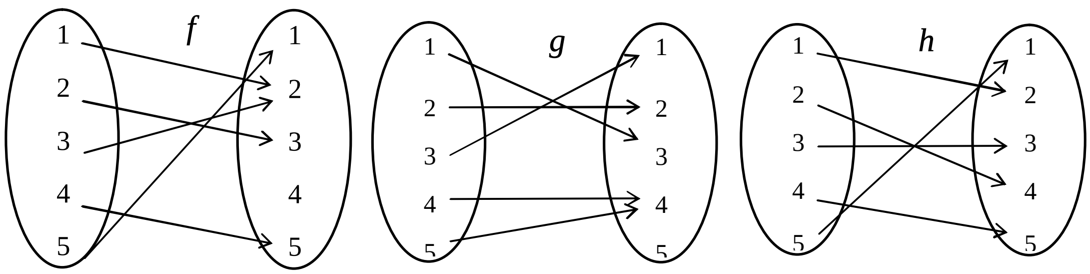
$f^{-1}(f(A)) = A$ untuk semua keadaan.

35. Misalkan $f : A \to B$, dan f mempunyai fungsi infers $f^{-1}: B \to A$. Sebutkan dua sifat dari fungsi f.

Jawab:

Fungsi f haruslah injektif (satu-satu) dan surjektif (pada).

36. Misalkan $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dan fungsi-fungsi $f : W \to W$, $g : W \to W$ dan $h : W \to W$ didefinisikan oleh diagram-diagram dibawah.



Dari fungsi-fungsi di atas mana yang memiliki fungsi invers ?

Jawab:

Agar suatu fungsi memiliki invers, maka fungsi itu haruslah satu-satu dan pada. Hanyalah *h* yang satu-satu dan pada; oleh karena itu hanyalah *h* yang memiliki fungsi invers.

37. Ambil $A = [-1, 1]$. Misalkan fungsi f_1, f_2, f_3, dan f_4 dari *A* ke dalam *A* didefinisikan oleh (1) $f_1(x) = x^2$, (2) $f_2(x) = x^3$, (3) $f_3(x) = \sin x$, (4) $f_4(x) = \sin \frac{1}{2} p x$

Nyatakan apakah tiap-tiap fungsi ini memiliki invers atau tidak.

Jawab:

(1) f_1 tidaklah satu-satu atau pada; oleh karena itu f_1 tidak memiliki invers.

(2) f_2 adalah satu-satu karena jika $x \neq y$ maka $x^5 \neq y^5$. Juga, f_2 adalah surjektif (pada). Oleh karena itu f_2 memiliki fungsi invers.

(3) f_3 adalah fungsi satu-satu tetapi tidak pada; oleh karena itu f_3 tidak memiliki invers.

(4) f_4 memiliki invers karena tidak ia adalah satu-satu dan pada.

38. Buktikan : Misalkan $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ memiliki fungsi-fungsi invers $f^{-1} : B \to A$ dan $g^{-1} : C \to B$. Maka fungsi-komposisi $g \circ f : A \to C$ memiliki fungsi invers $f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A$.

Perhatikan bahwa: $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1$ dan $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = 1$

Dihitung $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ (g \circ f)) = f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f)$

$= f^{-1} \circ (1 \circ f) = f^{-1} \circ f = 1$

Menggunakan sifat bahwa $g^{-1} \circ g$ adalah fungsi satuan dan hasilkali 1, yaitu fungsi fungsi satuan dan f adalah f. Dengan cara yang sama,

$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})) = g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ f)$

$g \circ (1 \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = 1$

39. Misalkan $f : R^{\#} \to R^{\#}$ didefinisikan oleh $f(x) = 2x - 3$. Dengan mengambil f adalah satu-satu dan pada, sehingga f memiliki fungsi infers $f^{-1} : R^{\#} \to R^{\#}$. Carilah rumus yang mendefinisikan fungsi invers f^{-1}.

Jawab:

Misalkan *y* adalah bayangan *x* di bawah fungsi *f*. Maka $y = f(x) = 2x - 3$

Akibatnya, *x* akan merupakan bayangan *y* di bawah fungsi invers f^{-1}, yaitu :

$$x = f^{-1}(y)$$

Dengan memecahkan untuk *x* dalam *y* dari persamaan di atas.

$$x = (y + 3)/2$$

Maka $f^{-1}(y) = (y + 3)/2$ ini adalah rumus yang mendefinisikan fungsi invers.

oleh karena itu

$f^{-1}(x) = (x + 3)/2$ juga mendefinisikan fungsi invers.

Lagi pula, pernyataan terakhir ini lebih baik karena *x* biasanya digunakan untuk mendefinisikan fungsi.

40. Misalkan $f : R^{\#} \rightarrow R^{\#}$ didefiniskan oleh $f(x) = x^3 + 5$. Perhatikan bahwa *f* adalah satu-satu dan pada, sehingga *f* memiliki fungsi invers. Carilah rumus yang mendefinisikan f^{-1}

    Jawab:

    Pecahkan *x* dalam *y* : $y = x^2 + 5$, $y - 5 = x^2$, dan $x = \sqrt[3]{y-5}$

    Maka fungsi invers adalah $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}$. $R^{\#}$ = himpunan bilangan riil.

41. Ambilkan $A = R^{\#} - \{3\}$ dan $B = R^{\#} - \{1\}$. Misalkan fungsi $f : A \rightarrow B$ didefinisikan oleh : $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$

    Maka *f* adalah satu-satu dan pada. Carilah rumus yang mendefinisikan f^{-1}.

    Jawab:

    Pecahkan $y = \dfrac{x-2}{x-3}$ untuk *x* dalam *y*, maka kita peroleh $x = \dfrac{2-3y}{1-y}$

    Oleh karena itu, fungsi inversnya adalah $f^{-1}(x) = \dfrac{2-3x}{1-x}$

42. Misalkan fungsi $f : R^{\#} \rightarrow R^{\#}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2 - 3x + 2$

    Carilah :

(a) $f(-3)$	(i) $f(2x - 3)$
(b) $f(2) - f(-4)$	(j) $f(2x - 3) + f(x + 3)$
(c) $f(y)$	(k) $f(x^2 - 3x + 2)$
(d) $f(a^2)$	(l) $f(f(x))$
(e) $f(x^2)$	(m) $f(f(x + 1))$
(f) $f(y - z)$	(n) $f(x + h) - f(x)$
(g) $f(x + h)$	(o) $[f(x + h) - f(x)]/h$

(h) $f(x + 3)$

Jawab:

Fungsi ini menetapkan untuk sebarang elemen kuadrat dari elemen itu dikurangi 3 kali elemen itu ditambah 2.

(a) $f(-3) = (-3)^2 - 3(-3) + 2 = 9 + 9 + 2 = 20$

(b) $f(2) = (2)^2 - 3(2) + 2 = 0$, $f(-4) = (-4)^2 - 3(-4) + 2 = 30$.

Maka $f(2) - f(-4) = 0 - 30 = -30$

(c) $f(y) = (y)^2 - 3(y) + 2 = y^2 - 3^y + 2$

(d) $f(a^2) = (a^2)^2 - 3(a^2) + 2 = a^4 - 3a^2 + 2$

(e) $f(x^2) = (x^2)^2 - 3(x^2) + 2 = x^4 - 3x^2 + 2$

(f) $f(y - z) = (y - z)^2 - 3(y - z) + 2 = y^2 - 2yz + z^2 - 3y + 3z + 2$

(g) $f(x + h) = (x + h)^2 - 3(x + h) + 2 = x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 2$

(h) $f(x + 3) = (x + 3)^2 - 3(x + 3) + 2 = (x^2 + 6x + 9) - 3x - 9 + 2$

$= x^2 + 3x + 2$

(i) $f(2x - 3) = (2x - 3) - 3(2x - 3) + 2 = 4x^2 - 12x + 9 - 6x + 9 + 2$

$= 4x^2 - 18x + 20$

(j) Dengan menggunakan (*h*) dan (*i*), kita peroleh :

$f(2x - 3) + f(x + 3) = (4x^2 - 18x + 20) + (x^2 + 3x + 2) = 5x^2 - 15x + 22$

(k) $f(x^2 - 3x + 2) = (x^2 - 3x + 2)^2 - 3(x^2 - 3x + 2) + 2 = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$

(l) $f(f(x + 1)) = f(x^2 - 3x + 2)^2 - x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$

(m) $f(f(x + 1)) = f\,([(x + 1)^2 - 3(x + 1) + 2]) = f([x^2 + 2x + 1 - 3x - 3 + 2])$

$f(x^2 - x) = (x^2 - x)^2 - 3(x^2 - x) + 2 = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

(n) Menurut (*g*), $f(x + h) = x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 2$. Oleh karena itu

$f(x + h) - f(x) = (x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 2) - (x^2 - 3x + 2)$

$= 2xh + h^2 - 3h$.

(o) Dengan menggunakan (*n*), kita peroleh:

$[f(x + h) - f(x)]/h = (2xh + h^2 - 3h)/h = 2x + h - 3$

43. Misalkan fungsi-fungsi $f : R^{\#} \rightarrow R^{\#}$ dan $g : R^{\#} \rightarrow R^{\#}$ didefinisikan oleh $f(x) = 2x - 3$ dan $g(x)\ x^2 + 5$. Carilah (a) $f(5)$, (b) $g(-3)$, (c) $g(f(2))$, (d) $f(g(3))$, (e) $g\ (a - 1)$, (f) $f(g\ (a - 1))$, (g) $g(f(x))$, (h) $f(g(x + 1))$, (i) $g(g(x))$.

Jawab:

(a) $f(5) = 2(5) - 3 = 10 - 3 = 7$

(b) $g(-3) = (-3)2 + 5 = 9 + 5 = 14$

(c) $g(f(2)) = g([2(2) - 3]) = g([4 - 3]) = g(1) = (1)^2 + 5 = 6$

(d) $f(g(3)) = f([3^2 + 5]) = f([9 + 5]) = f(14) = 2(14) - 3 = 25$

(e) $g(a - 1) = (a - 1)^2 + 5 = a^2 - 2a + 1 + 5 = a^2 - 2a + 6$

(f) Dengan mempergunakan (e), kita peroleh

$$f(g(a - 1)) = f(a^2 - 2a + 6) = 2(a^2 - 2a + 6) - 3 = 2a^2 - 4a + 9$$

(g) $g(f(x)) = g(2x - 3) = (2x - 3)^2 + 5 = 4x^2 - 12x + 14$

(h) $f(g(x + 1)) = f([(x + 1)^2 + 5]) = f([x^2 + 2x + 1 + 5])$

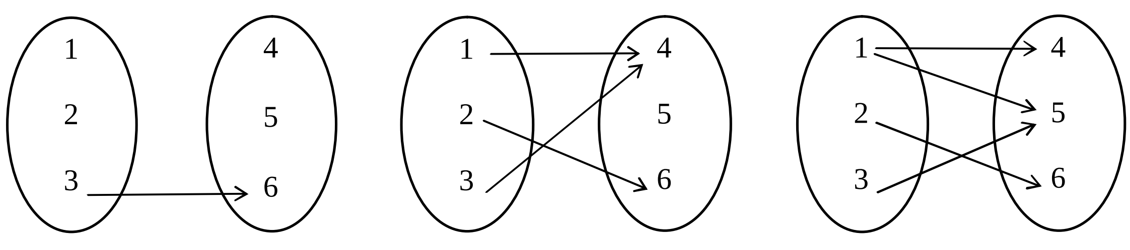
$= f(x^2 + 2x + 6) = 2(x^2 + 2x + 6) - 3$

$= 2x^2 + 4x + 9$

(i) $g(g(x)) = g(x^2 + 5) = (x^2 + 5)^2 + 5 = x^2\ 10x^2 + 30$

SOAL LATIHAN

1. Nyatakan apakah tiap-tiap diagram ini mendefinisikan suatu fungsi dari {1, 2, 3} ke dalam {4, 5, 6}, ataukah tidak.



(1) (2) (3)

2. Definisikan kembali fungsi-fungsi berikut dengan menggunakan rumus :

   (a) Untuk tiap-tiap bilangan riil, f menetapkan kuadratnya ditambah 3

(b) Untuk tiap-tiap bilangan riil, *g* menetapkan bilangan tersebut ditambah harga mutlaknya.

(c) Untuk tiap-tiap bilangan lebih besar daripada atau sama dengan 3, *h* menetapkan pangkat tiga dari bilangan tersebut dan untuk tiap-tiap bilangan lebih kecil daripada 3, *h* menetapkan bilangan 4.

3. Misalkan fungsi $f : R^{\#} \to R^{\#}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Carilah : (1) $f(4)$, (2) $f(-3)$, (3) $f(y - 2z)$, (4) $f(x - 2)$.

4. Misalkan fungsi $g : R^{\#} \to R^{\#}$ didefinisikan oleh $g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x \text{ jika } x \geq 2 \\ x + \text{ jika } x < 2 \end{cases}$

   Carilah: (1) $g(5)$, (2) $g(0)$, (3) $g(-2)$

5. Misalkan $T = [-3, 5]$ dan fungsi $f : T \to R^{\#}$ didefinisikan oleh $f(x) = 2x^2 - 7$

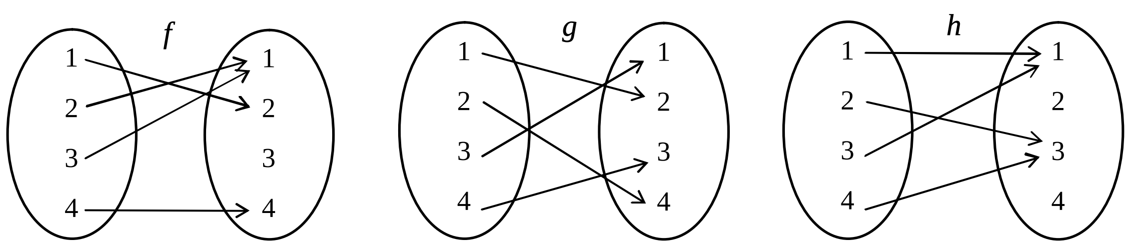
   Carilah : (a) $f(2)$, (b) $f(6)$, (c) $f(t - 2)$

6. Misalkan fungsi $h : R^{\#} \to R^{\#}$ didefinisikan oleh : $h(x) = \begin{cases} 2x + 5 \text{ jika } x > 9 \\ x^2 - |x| \text{ jika } x \in [-9, 9] \\ x - 4 \text{ jika } x < -9 \end{cases}$

   Carilah : (a) $h(3)$, (b) $h(12)$, (c) $h(-15)$, (d) $h(h(5))$ yaitu $h^2(5)$

7. Misalkan $X = \{2, 3\}$ dan $Y = \{1, 3, 5\}$. Ada berapa fungsi yang berbeda dari *X* ke dalam *Y* ?

8. Diagram-diagram berikut mendefinisikan fungsi-fungsi *f*, *g* dan *h* yang menetapkan himpunan {1,2,3,4} ke dalam dirinya sendiri.



   Carilah (1) jangkauan *f*, (2) jangkauan *g*, (3) jangkauan *h*.

9. Ambilkan W = {-1, 0, 2, 5, 11}. Misalkan fungsi $f : W \to R^{\#}$ didefinisikan $f(x) = x^2 - x - 2$. Carilah jangkauan f.

10. Pandang keenam fungsi berikut :

    $f_1 : [-2, 2] \to R^{\#}$ $\qquad$ $f_4 : (-\infty, -5) \to R^{\#}$

    $f_2 : [0, 3] \to R^{\#}$ $\qquad$ $f_5 : [-1, 4) \to R^{\#}$

    $f_3 : [-3, 0] \to R^{\#}$ $\qquad$ $f_6 : [-5, 3) \to R^{\#}$

    (a). Jika tiap-tiap fungsi didefinisikan oleh rumus yang sama $f(x) = x^2$, yaitu jika untuk tiap-tiap bilangan x, tiap-tiap fungsi menetapkan x^2, maka carilah jangkauan dari (1) f_1, (2) f_2, (3) f_3, (4) f_4, (5) f_5, (6) f_6

    (b). Jika tiap-tiap fungsi didefinisikan oleh rumus $f(x) = x^3$ yaitu jika untuk tiap-tiap bilangan x, tiap-tiap fungsi menetapkan x^3, maka carilah jangkauan dari (1) f_1, (2) f_2, (3) f_3, (4) f_4, (5) f_5, (6) f_6

    (c). Jika tiap-tiap fungsi didefinisikan oleh rumus $f(x) = x - 3$ Carilah jangkauan dari (1) f_1, (2) f_2, (3) f_3, (4) f_4, (5) f_5 (6) f_6

    (d). Jika tiap-tiap fungsi didefinisikan oleh rumus: $f(x) = 2x + 4$, Carilah jangkauan dari (1) f_1, (2) f_2, (3) f_3, (4) f_4, (5) f_5, (6) f_6

11. Andaikan $f : A \to B$. Yang manakah dari yang berikut ini selalu benar :

    (1) f(A) Ì B , (2) f(A) = B , (3) f(A) É B

12. Misalkan $f : X \to Y$. Nyatakanlah apakah masing-masing sifat berikut mendefinisikan suatu fungsi satu-satu atau tidak ?

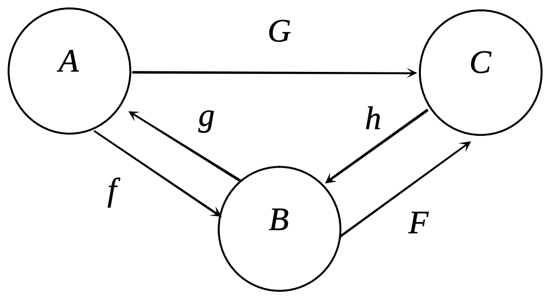
    (1) jika f(a) = f(b) maka $a = b$ $\qquad$ (3) jika f(a) ¹ f(b) maka $a \neq b$

    (2) jika $a = b$ maka f(a) = f(b) $\qquad$ (4) jika $a \neq b$ maka f(a) ¹ f(b)

13. Nyatakanlah apakah tiap-tiap fungsi dalam soal 10 adalah injektif (satu-satu) atau tidak.

14. Buktikan: Jika $f : A \rightarrow B$ adalah satu-satu dan jika $g : A \rightarrow C$ adalah injektif (satu-satu) maka fungsi perkalian $g \circ f : A \rightarrow C$ adalah injektif (satu-satu).

15. Fungsi-fungsi $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$, $h : C \rightarrow B$, $F : B \rightarrow C$ dan $G : A \rightarrow C$ digambarkan dalam diagram di bawah ini.



Nyatakanlah apakah masing-masing yang berikut ini mendefinisikan suatu hasilkali fungsi ataukah tidak dan bila ada yang mendefinisikan hasilkali fungsi maka tentukan ranah dan ko-domainnya :

(1) $g \circ f$, (2) $h \circ f$, (3) $F \circ f$, (4) $G \circ f$,

(5) $g \circ h$, (6) $F \circ h$, (7) $h \circ G \circ g$, (8) $h \circ G$.

16. Pandang fungsi-fungsi f, g dan h dalam soal 8. Carilah hasilkali fungsi dari

(1) $f \circ g$, (2) $h \circ f$ (3) $g \circ g$, yaitu g^2.

17. Misalkan fungsi-fungsi $f : R^\# \rightarrow R^\#$ dan $g : R^\# \rightarrow R^\#$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2 + 3x + 1$, dan $g(x) = 2x - 3$. Carilah rumus-rumus yang mendefinisikan hasilkali fungsi dari (1) $f \circ g$, (2) $g \circ f$, (3) $g \circ g$, (4) $f \circ f$.

18. Misalkan fungsi-fungsi $f : R^{\#} \to R^{\#}$ dan $g : R^{\#} \to R^{\#}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2 - 2\,|x|$, dan $g(x) = x^2 + 1$. Carilah (a) $(g \circ f)(3)$, (b) $(f \circ g)(-2)$, (c) $(g \circ f)(-4)$, c (d) $(f \circ g)(5)$

19. Misalkan $f : R^{\#} \to R^{\#}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2 + 1$

    Carilah (1) f^{-1}1(5), (2) f^{-1} (0), (3) f^{-1}(10), (4) f^{-1} (-5), (5) f^{-1} ([10, 26]), (6) f^{-1} ([0, 5]), (7) f^{-1} ([-5, 1]), (8) f^{-1} ([-5, 5])

20. Misalkan $g : R^{\#} \to R^{\#}$ didefinisikan oleh $g(x) = \sin x$.

    Carilah (1) g^{-1}(0), (2) g^{-1}1), (3) g^{-1} (2), (4) g^{-1} ([-1, 1]).

21. Misalkan $f : R^{\#} \to R^{\#}$ didefinisikan oleh $f(x) = 3x + 4$. Maka f adalah injektif (satu-satu) dan surjektif (pada). Berikan satu rumus yang mendefinisikan g^{-1}.

22. Ambilkan $A = R^{\#} - \{-1/2\}$ dan $B = R^{\#} - \{1/2\}$. Misalkan $f : A \to B$ didefinisikan oleh $f(x) = (x - 3)/(2x + 1)$

    Maka f adalah satu-satu dan pada. Carilah sebuah rumus yang mendefinisikan fungsi f^{-1}.

23. Ambilkan $W = [0, \infty)$. Misalkan fungsi-fungsi $f : W ® W$, $g : W ® W$ dan $h : W ® W$ didefinisikan oleh : $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 1$, dan $h(x) = x + 2$

    Dari fungsi-fungsi ini yang manakah yang surjektif (pada).

24. Misalkan fungsi $f : R^{\#} \to R^{\#}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2 + x - 2$ Carilah

(a) $f(3)$;	(g). $f(x + h) – f(x)$
(b) $f(-3) – f(2)$;	(h) $f(f(x))$
(c) $f(x – 2)$;	(i) f^{-1} (10)
(d) $f(f(-2))$;	(j). f^{-1} (4)

(e) $f(y)$; (k). $f^{-1}(-5)$

(f) $f(x + h)$;

25. Misalkan $f : A \to B$; $g : B \to A$ dan $g \circ f = 1_A$, fungsi satuan pada A. Nyatakan apakah masing-masing yang berikut ini benar atau salah ?

(1) $g = f^{-1}$.

(2) f fungsi surjektif (pada).

(3) f adalah fungsi injektif (satu-satu).

(4) g fungsi surjektif (pada)

(5) g adalah fungsi injektif (satu-satu).

Referensi

Djauhari, M.A.,1993, “Pengantar matematika modern” Karunia jakarta

Liu C. L., “1987”, “ Elements of Discrete Mathematics ”, Edisi kedua, McGraw-Hill, Inc.

Setiadji & Sitjiana, “1995”, “ Pengantar Struktur Aljabar “, FMIPA Universitas Gajah Mada

Seymour L, “1983”, “ Finite Mathematics ”, McGraw-Hill, Inc.

Seymour L, “1984”, “ Set Theory ”, McGraw-Hill, Inc.

Soehakso, “ Himpunan, Relasi dan Fungsi “, FMIPA Universitas Gajah Mada.

Theresia M. H. T. S, “1992”, “ Pengantar Dasar Mathematika Logika dan Teori himpunan “, Erlangga, Jakarta.